Intégration sur un segment

Les exercices à regarder sont mentionnés par une *.

Calculs de primitives et d'intégrales

(*)**Exercice 1 :** Donner une primitive des fonctions suivantes avec les intervalles de validité :

1. $\frac{\sqrt{x} + x + x^{5/3} + x^2 + 3x^3}{x^2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 3. $\frac{\ln x}{x}$ 4. $\frac{1}{t \ln t}$ 5. $\sin^3 t$	6. $\cos t(\sin t + \sin^3 t)$ 7. $x\sqrt{x^2 - 1}$ 8. $\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ 9. $\cos^5 x$ 10. $\frac{x}{(2x + 3)^4}$

(*)**Exercice 2 :** Donner une primitive des fonctions suivantes avec les intervalles de validité :

1. $(5x + 1)^2 x^{10}$ 2. $x(3x + 2)^{20}$ 3. $\frac{t}{(3t^2 + 5)^2}$ 4. $\frac{\sin t}{(3 + \cos t)^4}$ 5. $\frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3 + 1)^7}}$ 6. $x\sqrt{x + 1}$	7. $e^x \sin(4x)$ 8. $\frac{x}{\cos^2 x}$ 9. $x^3 e^x$ 10. $x^2 \ln x$ 11. $\frac{1}{1 - t^2}$ (écrire $f(t) = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}$) 12. $\frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)}$ (écrire $f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{a}{x - 2}$)

(*)**Exercice 3 :** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^3 x^2 - 1 dx$ 2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t} - t^2}{\sqrt{t} + 1} dt$ 3. $\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} e^x \cos x dx$ 4. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ 5. $\int_0^1 u\sqrt{3 - u} du$	1. $\int_e^{e^2} \left(\frac{x - 2}{e^x} - \frac{5}{x} \right) dx + \int_{e^2}^e (t - 2)e^{-t} dt$ 2. $\int_0^\pi (y - 1) \sin(3y) dy$ 3. $\int_1^e \alpha^2 \ln \alpha d\alpha$ 4. $\int_0^3 2u - 1 du$

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{(\sqrt{t^2 + 1} + t)^2}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$ 2. $\int_0^{2\pi} \cos v dv$ 3. $\int_{-1}^1 s^3(1 - 2s) ds$ 4. $\int_0^{10} x \inf(5, x) dx$ 5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t dt$	6. $\int_0^1 (x^3 + x^2 + x + 1) e^x dx$ 7. $\int_{-1/3}^0 2^{3x+1} dx$ 8. $\sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} e^{-x} dx$ 9. $\int_0^1 x \ln(1 + x) dx$

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-2}^2 \sin(\pi t^5) dt$

2. $\int_1^e t^n \ln t dt$

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3(2x) dx$

4. $\int_1^e t^n (\ln t)^2 dt$

5. $\int_{-3}^3 u^5 e^{\cos u} du$

6. $\int_2^4 \cos^5\left(\frac{\pi t}{6}\right) dt$

7. $\int_0^5 x[x]e^x dx$

8. $\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du$

9. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin \theta} d\theta$ (poser $t = \tan(\theta/2)$)

10. $\int_0^1 \frac{1}{s^2 - s + 1} ds$
(mettre le dénominateur sous forme canonique puis
poser $t = \frac{2}{\sqrt{3}}(s - \frac{1}{2})$)

(*)**Exercice 6 :** Soient $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: Calculer $\int_0^1 \frac{x}{1+t} dx$, $\int_0^1 \frac{x}{1+t} dt$, $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dt$, $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$

Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$: Calculer $\int_0^t \cos(x-t) dx$, $\int_x^{\pi/2} \cos(x-t) dt$.

Exercice 7 : Trouver a, b et c tels que $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$. Calculer ensuite $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}$ puis $\int_{1/2}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$.

(*)**Exercice 8 :** Calculer $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$ en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 9 : Soit $A = \int_0^x e^t \sin 2t dt$, $B = \int_0^x e^t \cos 2t dt$, $C = \int_0^x e^t \sin^2 t dt$ et $D = \int_0^x e^t \cos^2 t dt$.

1. Calculer A et B à l'aide d'intégrations par parties.
2. Calculer C et D en commençant par trouver leur somme et leur différence.

(*)**Exercice 10 :** On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$.

Comparer I et J à l'aide d'un changement de variables. Calculer leur somme et en déduire I et J .

Sommes de Riemann

(*)**Exercice 11 :** Calculer la limite des suites pour $n \rightarrow +\infty$:

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}$

2. $\sum_{k=0}^n \frac{k^2 + k}{n^2}$

3. $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

5. $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2n+3k}$

6. $\sum_{k=3}^{n-3} \frac{n}{n^2 + k^2}$

7. $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt[n]{e^k}}$

8. $\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n}$

9. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

10. $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$

11. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+2k-1}$

(Utiliser : $\frac{1}{2n+2k} \leq \frac{1}{2n+2k-1} \leq \frac{1}{2n+2k-2}$)

(*)**Exercice 12** : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{nt}\right) dt$ (procéder par encadrements)

(*)**Exercice 13** : **Lemme de Riemann-Lebesgue** :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx$ (commencer par une IPP).

Exercice 14 : Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$. On définit, pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que la somme partielle $\sum_{k=0}^n u_k$ est égale à $I + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.
2. Quelle est la nature de $\sum u_n$? En calculer la somme.

Exercice 15 : Pour $n \geq 0$, on définit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} ($\forall n \geq 0$). Calculer I_0, I_1 et I_2 .
3. Pour $n \geq 0$ on pose $f_n(x) = (\ln x)^n$. Soit F_n une primitive de f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$. Justifier que F_n existe. Montrer ensuite que $G_n : t \mapsto F_n(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer G_n' .
4. En déduire que $\forall n \geq 1$, $F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 t^n e^t dt$, puis que $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
5. Conclure.

Exercice 16 : Intégrales de Wallis : Calculer $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$. Voir Devoir Maison.

(*)**Exercice 17** : Justifier l'existence des intégrales I_n et calculer la limite de la suite (I_n) dans chacun des cas suivants :

1. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{e^x + x} dx$
2. $I_n = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$
3. $I_n = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{n^2 + x^n} dx$

Exercice 18 : Soit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1. Calculer I_0 et I_1 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Quelle est la nature de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$?
3. Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 19 : Soit $I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2} dt$.

1. Quelle est la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$?
2. Donner une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.
3. En déduire que $\forall n \geq 2$, $I_n = \sqrt{e} - \frac{3}{2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k k!}$.
4. Soit $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k k!}$. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? En cas de convergence, quelle en est la limite?

(*)**Exercice 20** : On considère les intégrales $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t^2 + 1) dt$ et $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2 + 1} dt$.

1. Montrer que $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.
2. Donner une relation entre I_n et J_{n+2} .
3. Quelle est la limite de I_n lorsque $n \rightarrow +\infty$? En donner un équivalent.

Exercice 21 : Soit $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^n}$.

1. Montrer que $1-x \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0; 1]$.
2. En déduire que pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}$.
3. Donner un équivalent simple de I_n .

(*)**Exercice 22** : Soit $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
2. Calculer I_0 et à l'aide du changement de variables $t = \tan u$ calculer I_1 . Que valent I_2 et I_3 ?

Fonctions définies par une intégrale

(*)**Exercice 23** : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et soient u et v deux applications définies et dérivables sur

un intervalle I . On définit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

1. Montrer que g est bien définie (sur I)
2. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

(*)**Exercice 24** : Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{t^2}{1+t^8} dt$

Exercice 25 : Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ des fonctions suivantes, leur signe, leur parité éventuelle, leur dérivée f' , et leur sens de variations :

1. $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t}$
2. $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$
3. $f(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$

(*)**Exercice 26** : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? Quel est son sens de variations?
2. On pose $g(x) = f(x) - \ln x$. Etudier le signe de g . En déduire les limites de f aux bornes du domaine $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que $\forall t > 0$, $e^t > t e^{t/2}$. En déduire le comportement asymptotique de f .
4. Quelle est l'allure de la courbe représentative de f ?

Exercice 27 : $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? Quel est son signe, en fonction des valeurs de x ?
2. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$,
3. Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$. Quel est le sens de variations de f ? Préciser pour quelle(s) valeur(s) de x , l'application f admet un extremum.
4. Calculer $f''(x)$ et déterminer son signe. Donner une allure de la courbe représentative de f .

Suppléments

Exercice 28 : Soit $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. On définit les fonctions $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$ et $g(x) = \int_x^{x^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\ln 2} \ln |\ln t|\right) \frac{dt}{t \ln t}$.

1. Montrer que f et g sont bien définies, et calculer $f(x)$ et $g(x)$.
2. Soit $h(x) = |x - E(x) - 0,5|$. Montrer que h est continue et périodique.
3. Soit $I(x) = \int_x^{x^2} h\left(\frac{\ln |\ln t|}{\ln 2}\right) \frac{dt}{\ln t}$. Montrer que l'intégrale $I(x)$ existe et la calculer.

Exercice 29 : Soit $a \in]0; 1[$, f_a et g_a deux applications définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = a^x$ et $g_a(x) = x^a$.

Construire dans un même repère une allure des courbes représentatives de f_a et de g_a (préciser leur intersection).

Calculer, pour $\lambda \geq a$: $I(\lambda) = \int_0^\lambda (f_a(x) - g_a(x)) dx$.

Montrer qu'il existe une unique valeur $\lambda_0 \geq a$ telle que $I(\lambda_0) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 30 : Soit $a > 0$, $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0, a]$ on ait : $f(x) \neq 1$ et $f(x)f(a-x) = 1$.

Soit $I = \int_0^a \frac{dx}{1+f(x)}$. Calculer I à l'aide d'un changement de variables bien choisi.

Exercice 31 : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Montrer que $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$.

Indication : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Intégrer $\left[\lambda f(x) + g(x)\right]^2$ et étudier des propriétés de signe.