Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable

Les exercices à regarder sont mentionnés par une *.

Dénombrement et probabilités sur un ensemble fini

Exercice 1 : On dispose d'un damier carré à 4 lignes et 4 colonnes et de 4 jetons indiscernables. On répartit les jetons sur 4 cases différentes du damier. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

1. Aucun des jetons ne se situe sur la diagonale.
2. Trois jetons exactement sont sur une même diagonale.
3. Chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un jeton.

Exercice 2 : Combien y a-t-il de pièces dans un jeu de dominos ?
On choisit deux pièces au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient compatibles ?

(*)Exercice 3 : On lance simultanément 21 dés à 6 faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité pour qu'un seul dé porte le numéro 1, deux dés portent le numéro 2, trois dés portent le numéro 3, quatre dés portent le numéro 4, cinq dés portent le numéro 5 et six dés portent le numéro 6.

Exercice 4 : Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 cœurs et 1 dix dans une main de 8 cartes ?

Exercice 5 : Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une carte autre que l'as de cœur par un second as de cœur. Une personne prend simultanément 3 cartes dans le tas. Quelle est la probabilité pour qu'elle s'aperçoive de la supercherie ? Même question si elle prend 8 cartes ? A partir de combien de cartes a-t-elle au moins une chance sur deux de voir la supercherie ?

Exercice 6 : Un dresseur de singes s'occupe de deux singes : Cheeta et Max. Il fournit à Max une machine à écrire : Max est capable d'appuyer 5 fois de suite sur une touche totalement au hasard parmi les 26 lettres de l'alphabet pour former un mot de 5 lettres. Il fournit à Cheeta 26 cartons où sont écrites chacune des 26 lettres de l'alphabet. Cheeta est capable d'aligner 5 cartons au hasard, pour former un mot de 5 lettres (les mots peuvent ne pas avoir de sens).

1. Max écrit un mot. Quelle est la probabilité pour que ce mot soit "BABAR" ?
2. Même question pour Cheeta.
3. Cheeta vient d'écrire un mot, et Max s'apprête à en faire autant. Quelle est la probabilité pour qu'il écrive le même mot que Cheeta ?
4. Max écrit un mot. Quelle est la probabilité pour que Cheeta soit en mesure de le reproduire ? Dans ce cas, quelle est la probabilité pour qu'il le reproduise ?

(*)Exercice 7 : On tire deux boules successivement et avec remise dans une urne contenant 7 boules blanches et 4 boules noires. On note les couleurs des deux boules obtenues dans l'ordre d'apparition.

1. Quelles sont les issues possibles ? Quelle est la probabilité de chacune d'entre elles ?
2. Quelle est la probabilité pour que les deux boules aient la même couleur ? soient de couleurs différentes ?
3. Citer deux événements contraires, deux événements incompatibles mais pas contraires.

(*)Exercice 8 : On dispose de deux urnes identiques, de $2n$ boules blanches et de $2n$ boules noires. On les répartit de l'une des trois façons suivantes :

1. Chacune des deux urnes contient n boules de chaque couleur.
2. Une urne contient toutes les boules blanches et l'autre urne contient toutes les boules noires.
3. Une urne contient une boule blanche et pas de boule noire, et l'autre urne contient toutes les autres boules.

On choisit une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On gagne si la boule est blanche. Quelle est la répartition la plus avantageuse ? la moins avantageuse ?

Exercice 9 : Est-il plus probable d'avoir au moins un 1 en lançant 4 fois un dé ou d'avoir au moins un double 1 en lançant 24 fois deux dés.

Exercice 10 : Une urne contient 3 boules noires et 4 boules blanches. On tire sans remise trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'avoir dans l'ordre "noire, blanche, noire" ?

Exercice 11 : On a n paires de chaussettes à ranger dans n tiroirs. Chaque tiroir peut contenir de 0 à n paires.

1. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une paire dans chaque tiroir ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement un tiroir vide ?

Exercice 12 : On choisit 10 nombres distincts entre 1 et 100, puis on effectue un tirage simultané de 10 boules dans une urne qui en contient 100, numérotées de 1 à 100.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir les 10 numéros choisis ?
2. Quelle est la probabilité d'en obtenir exactement 5 identiques ?

Probabilités conditionnelles

Exercice 13 : Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre les itinéraires A,B,C et D. La probabilité de choisir le chemin A est de 1/3, celle de choisir le chemin B est de 1/4 et celle de choisir C est de 1/12. La probabilité que l'élève arrive en retard avec le chemin A est de 1/20. Pour B elle vaut 1/100 et pour C elle vaut 1/5. En empruntant le chemin D il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité pour que l'élève choisisse le chemin D ?
2. L'élève arrive en retard Quelle est la probabilité pour qu'il ait choisi le chemin C ?

(*)Exercice 14 : Un fumeur essaye d'arrêter de fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il fume le lendemain vaut 0,3. En revanche, s'il fume un jour donné, la probabilité pour qu'il ne fume pas le lendemain est 0,9. Cette personne ne fume pas le 31 décembre (jour 0).
Quelle est la probabilité pour qu'elle fume le $n^{ième}$ jour de l'année ?
Application numérique : Calculer la probabilité pour qu'elle fume le 31 janvier, le 1^{er} février, le 31 décembre suivant.

Exercice 15 : Soient $\big(\Omega, P(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0,6$. Calculer $P(A \cup B)$ et $P_{\overline{B}}(A)$.

(*)Exercice 16 : Soient $\big(\Omega, P(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini, A et B deux événements tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$. Calculer $P(\overline{A} \cup B)$, $P_A(A \cap B)$ et $P_B(\overline{A})$ dans les cas suivants :

1. A et B incompatibles.
2. A et B indépendants par rapport à la probabilité P.
3. $P(A \cup B) = 0,8$.

Exercice 17 : Soient $\big(\Omega, P(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini, A , B et C trois événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 3/5$ $P_A(C) = 0,5$, $P(A \cap B) = 1/5$, $P_B(C) = 0,5$ et $\frac{1}{P(C)} \in \mathbb{N}$. Que vaut $P(C)$?

Exercice 18 : Soient A , B et C trois événements tels que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,25$, $P(C) = 0,25$, $P(A \cap B) = 0,15$, $P(B \cap C) = 0,15$, $P(C \cap A) = 0,2$, $P(A \cap B \cap C) = 0,08$.

1. Quelle est la probabilité pour que :
   (a) A et C se produisent mais pas B ?
   (b) Deux des trois événements se produisent et pas les trois ?
   (c) Un seul des trois événements se produise ?
2. Calculer $P_B(A)$, $P_A(B)$, $P_C\big((A \cap B)\big)$, $P_A\big((B \cup C)\big)$, $P_{B \cup C}\big(A\big)$.

(*)Exercice 19 : On lance un dé équilibré à 6 faces. Soit A l'événement : "la somme est paire", B : "le premier dé porte un numéro pair" et C : "le deuxième dé porte un numéro pair".
Étudier l'indépendance de (A, B) , (B, C) , $(A, B \cap C)$, $(A, B \cup C)$ et (A, B, C).

Exercice 20 : Soient A, B et C trois événements tels que $P(A \cap B \cap C) \neq 0$ et $P_{A \cap B}\big(C\big) = P_B(C)$.
Montrer que $P_{B \cap C}\big(A\big) = P_B(A)$.

(*)Exercice 21 : On lance n dés non pipés et on note P_n l'événement : "le total des dés est un nombre pair". Trouver une relation de récurrence liant les probabilités des événements P_n, et calculer P_n.

(*)Exercice 22 : Une boite contient 3 jetons rouges et 5 jetons blancs. Une urne contient 4 jetons rouges et 2 jetons blancs. On tire au hasard un jeton dans la boite, et sans le regarder, on le met dans l'urne. on tire enfin un jeton de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que ce dernier jeton soit blanc ?
2. Sachant que le dernier jeton est rouge, quelle est la probabilité que le premier ait été rouge ?

Exercice 23 : On considère que 5% des hommes et 25 femmes sur 10 000 sont daltoniens. On choisit une personne daltonienne au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit un homme ?

Exercice 24 : Dans une université, 70% des étudiants sont des garçons. 60% des garçons et 25% des filles sont fumeurs. On considère un fumeur choisi au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit un garçon ? une fille ?

(*)Exercice 25 : Une urne contient 3 boules bleues et 2 boules rouges. Une deuxième urne contient 2 boules bleues et 5 boules rouges. Une boule est tirée au hasard dans une des deux urnes : elle est bleue. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de la première urne ?

Exercice 26 : On lance trois fois de suite un dé bien équilibré. On note a , b , c les trois nombres obtenus, dans l'ordre d'apparition. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Quelle est la probabilité pour que $Q(x)$ ait deux racines réelles différentes ? Une racine double ? Deux racines complexes différentes ?

Exercice 27 : Cinq personnes montent dans un bus. Il reste 7 arrêts jusqu'au terminus. Quelle est la probabilité pour que deux d'entre elles au moins descendent au même arrêt.

(*)Exercice 28 : On lance deux dés discernables. On considère les événements A : "la somme des deux nombres est inférieure ou égale à 8", et B : "la somme des deux nombres est divisible par 3". Calculer $P(A)$ et $P(B)$ et étudier l'indépendance de ces deux événements.

Exercice 29 : Une épidémie affecte 5% de la population. Le médecin visite tout le monde : si la personne est en bonne santé, il en est sûr avec une probabilité de 0,96, et sinon il lui donne un traitement. Si la personne est malade, il le détecte avec une probabilité de 0,98 et lui donne un traitement, et sinon il ne prescrit rien. On sélectionne une personne au hasard dans la population. Quelle est la probabilité pour :

1. que le médecin se soit trompé de diagnostic à son sujet ?
2. Que la personne soit en bonne santé et que le médecin lui ait prescrit un traitement ?
3. Que la personne soit en bonne santé alors que le médecin lui a prescrit un traitement ?
4. que la personnes soit malade, alors que le médecin ne lui a donné aucun traitement à suivre ?

(*)Exercice 30 :

1. Montrer que $P_B(A) \geq P(A) \;\Rightarrow\; P_A(B) \geq P(B)$.
2. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. Albert en tire une au hasard, qu'il ne remet pas, puis Barnabé en tire une à son tour. Barnabé obtient un nombre compris entre $n+1$ et $2n$. La probabilité pour qu'Albert ait obtenu un numéro compris entre $n+1$ et $2n$ est-elle inférieure ou supérieure à $0,5$? Calculer cette probabilité.

Probabilités sur un ensemble (au plus) dénombrable

Exercice 31 : Déterminer les probabilités sur $\mathbb{N}$ qui suivent une progression
- arithmétique.
- géométrique.

(*)Exercice 32 : Deux personnes jouent chacune n fois à pile ou face avec une pièce de monnaie équilibrée. Déterminer la probabilité pour qu'ils obtiennent le même nombre de face.

(*)Exercice 33 : Un ours tourne dans sa cage de façon aléatoire. Il va dans le sens ↱ avec la probabilité p et dans l'autre sens avec la probabilité $1-p$ $(0 < p < 1)$. A l'instant 0, l'ours se trouve au point A. On suppose qu'à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ l'ours se trouve en l'un des trois points A, B ou C. On note a_n (resp. b_n, c_n) la probabilité que l'ours se trouve au point A (resp. B, C) à l'instant n.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
2. Exprimer $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
3. Dans le cas $p = \dfrac{1}{2}$, on pose $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire les limites de a_n, b_n et c_n lorsque n tend vers $+\infty$. Conclusion ?

(*)Exercice 34 : Un athlète fait du saut en hauteur. On numérote les différentes hauteurs dans l'ordre : $1, 2, \ldots, n, \ldots$ On suppose que les sauts sont indépendants entre eux et que la probabilité de réussir le saut numéro n est de $1/n$. L'athlète effectue les sauts dans l'ordre et s'arrête au premier échec.

1. Quelle est la probabilité p_n qu'il s'arrête exactement après le $n^{ème}$ saut ?
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.
3. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas le droit de tenter le $2^{ème}$ (le $3^{ème}$, le $4^{ème}$) saut ?
4. Combien en moyenne effectue-t-il de sauts ?

(*)Exercice 35 : Deux personnes écrivent au hasard et indépendamment l'une de l'autre un nombre de deux chiffres (entre 10 et 99). Si le numéro est le même, elles s'arrêtent, sinon elles recommencent. On suppose que les experiences sont indépendantes.

Quelle est la probabilité q_n qu'elles écrivent le même numéro au $n^{ème}$ essai ?

Quelle est la probabilité qu'elles n'écrivent jamais le même numéro ? Interpréter ce résultat.

Exercice 36 : On lance une pièce de monnaie autant de fois que nécessaire pour obtenir au total cinq fois pile.

Quelle est la probabilité pour qu'on ait besoin de faire au minimum n lancers ?

Quelle est la probabilité pour qu'on n'y arrive jamais ? Interpréter.

Exercice 37 : Une urne contient N boules numérotées de 1 à N ($N \geq 1$). On effectue une suite infinie de tirages avec remise, et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des numéros successifs obtenus.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre de n-uplets $(u_1 , u_2 , \ldots , u_n)$ d'entiers de $[\![1, N]\!]$ tels que $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$ (on pourra s'inspirer d'un exercice de la feuille sur le dénombrement).
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A_n l'événement "les tirages successifs amènent n premiers numéros qui forment une suite croissante (au sens large)". Calculer $v_n = P(A_n)$ (on conviendra que $v_1 = 1$).
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n+N}{n(n+1)}$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{2}{N}$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$?
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = v_n - v_{n+1}$. Interpréter w_n comme la probabilité d'un événement dépendant de A_{n+1} et A_n.
   Calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ en fonction de v_{n+1}. Quelle est sa limite ? L'interpréter.

Exercice 38 : Un ordinateur écrit une suite de 0 et de 1 de façon aléatoire. Chaque chiffre est écrit indépendamment des précédents, le 0 ayant une probabilité p d'apparaître et le 1 ayant la probabilité $q = 1 - p$ d'être écrit.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité de voir apparaître la séquence "01" pour la première fois aux places n et $n + 1$?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux 0 consécutifs, sans qu'il n'y ait jamais eu auparavant la séquence "01" ?
3. Quelle est la probabilité de voir apparaître deux 1 consécutifs au moins dans une séquence de 5 chiffres ?

(*)Exercice 39 :

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} = -\ln(1-q)$ pour tout $|q| < 1$.
2. On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie bien équilibrée.
   A chaque fois que l'on obtient face, on ajoute une boule noire dans l'urne, et la première fois que l'on obtient pile, on tire au hasard une boule de l'urne (si on n'obtient jamais pile, on se fait donner une boule blanche).
   Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche ?

(*)Exercice 40 : Deux pièces de monnaie donnent *pile* avec les probabilités $p_1 \in]0; 1[$ (resp. $p_2 \in]0; 1[$) et $face$ avec les probabilités $q_1 = 1 - p_1$ (resp. $q_2 = 1 - p_2$). On commence par choisir une des deux pièces au hasard pour effectuer le premier lancer. Les lancers successifs ont lieu avec la règle suivante : si le résultat d'un lancer est *pile* on joue le lancer suivant avec la même pièce et s'il est $face$, on change de pièce pour le lancer suivant.

1. Quelle est la probabilité de jouer le deuxième lancer avec la première pièce ?
2. Sachant que l'on a fait le 2^e lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le 4^e avec la pièce 2 ?
3. Sachant que l'on a fait le 2^e lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité que l'on ait joué le 1^{er} avec la pièce 2 ?

4. Quelle est la probabilité pour que, pour la première fois, on joue avec la pièce numéro 1 au k^e lancer ? Calculer la somme des probabilités précédentes pour $1 \leq n < +\infty$. Va-t-on finir par lancer avec la pièce numéro 1 ?

(*)Exercice 41 : On dispose d'une infinité de boules indiscernables et de n boites numérotées de 1 à n de capacité illimitée. On place les boules dans les boites indépendamment les unes des autres.

1. On suppose $n = 2$ et on note A_k l'événement " On a placé k boules lorsque pour la première fois les deux boites ne sont plus vides ". Calculer $P(A_k)$.
2. On suppose $n = 3$ et on note B_k l'événement " On a placé k boules lorsque pour la première fois deux des trois boites ne sont plus vides ". Calculer $P(B_k)$.
   On note C_k l'événement " On a placé k boules lorsque pour la première fois les trois boites ne sont plus vides ". Calculer $P_{B_k}(C_l)$ pour $l \geq 1$ et $k \geq 1$. En déduire $P(C_l)$.
   Que peut-on dire du système $(C_l)_{l \geq 1}$? Conclure.

Suppléments

Exercice 42 : Soit E un ensemble fini contenant n éléments. On choisit trois sous-ensembles A, B et C dans E. Quelle est la probabilité pour que :

1. A et B soient disjoints ?
2. $A \subset B$?
3. $A \subset B \subset C$?

Exercice 43 : Le serrurier dispose d'un trousseau de n clés pour essayer d'ouvrir une serrure, que seule l'une des clés permet d'ouvrir. Il essaye au hasard les clés l'une après l'autre et méthodiquement, sans reprendre deux fois la même, jusqu'à trouver la bonne. Quelle est la probabilité pour qu'il trouve la bonne clé au $k^{ième}$ essai ?
Même question s'il a un peu trop bu et qu'il ne parvient plus à retenir quelles sont les clés déjà utilisées.

Exercice 44 : On considère un groupe de personnes parmi lesquelles un tiers parle le Russe. Parmi les personnes qui parlent le Russe, 6 sur 7 parlent également Chinois. Parmi celles qui parlent Chinois, il y en a un qui parle Russe contre 4 qui ne le parlent pas. Quelle est la probabilité pour quelqu'un qui ne parle pas le Russe de ne pas parler non plus le Chinois ?

Exercice 45 : Quatre voyageurs mettent un bagage en consigne, mais on permute leurs numéros.

1. Soit $i \in [\![1; 4]\!]$. Quelle est la probabilité pour que la personne i retrouve son bagage ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une des 4 personnes retrouve son bagage ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'aucune ne retrouve son bagage ?

Exercice 46 : Une urne contient une boule bleue, une boule blanche et une boule rouge. On tire n boules successivement et avec remise dans cette urne ($n \geq 3$).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule de chaque couleur ?
2. Quelle est la probabilité pour que la première et la dernière boule soient de même couleur ?

Exercice 47 : Une urne contient 8 jetons numérotés de 1 à 8. On en tire 3 simultanément. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros tirés soit supérieure ou égale à la somme des numéros restants ?

Exercice 48 : Dans une usine, un service contrôle les colis destinés à la livraison. Ce contrôle est effectué pour tous les colis par deux personnes successivement qui détectent chacune un colis non conforme dans 90% des cas. Les contrôles de ces deux personnes sont indépendants. On sait d'autre part que 5% des colis ne sont pas conformes.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un colis ne soit pas conforme et ne soit pas détecté ? Quelle est la probabilité pour qu'un colis ne soit pas conforme et soit détecté ?
2. Un lot de 100 colis est présenté au contrôle en vue d'une livraison.
   (a) Quelle est la probabilité pour que les 100 colis soient conformes ?
   (b) Quelle est la probabilité pour que les 100 colis soient déclarés bons pour la livraison ?
   (c) Quelle est la probabilité pour que tous les colis qui passent le filtre du contrôle soient conformes ?
   (d) Quelle est la probabilité pour qu'un colis non conforme au moins échappe au contrôle ?
   (e) Quelle est la probabilité pour que seuls 95 des 100 colis passent le contrôle ?

Exercice 49 : On a mélangé dans un tiroir 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures rouges et 4 paires de chaussures vertes. Excepté la couleur, toutes les paires sont identiques. On prend deux chaussures au hasard (on suppose que les tirages des deux chaussures sont indépendants). Quelle est la probabilité de pouvoir aller se promener dans la rue avec la paire de chaussures ainsi formée sans se faire trop remarquer ?

Exercice 50 : On considère n urnes contenant chacune n jetons numérotés de 1 à n. On extrait au hasard un jeton de chaque urne. Quelle est la probabilité pour que le plus petit numéro soit k ? Quelle est en moyenne le plus petit numéro obtenu ?

Exercice 51 : Le Dimanche 21 Février 1999 à Téléfoot, un journaliste passionné de football annonçait : "En Coupe de France, pour les $1/8^e$ de finales à venir, il ne reste que 3 équipes de Division 1 sur 16 équipes, ce qui ne s'est jamais vu !". Un autre journaliste, passionné de football et de probabilités ajoutait : "La probabilité pour que deux équipes de D1 se rencontrent en $1/8^e$ est alors de $1/8$ " . Qu'en pensez-vous ?

Exercice 52 : Dans un match de football, en cas de match nul à la fin du temps réglementaire (90 mn) et des prolongations (30 mn) on procède à la "séance de tirs au buts". Chaque équipe choisit cinq joueurs qui vont chacun tenter un tir au but. A l'issue des dix tirs, l'équipe qui a marqué le plus de points a gagné. On suppose qu'un joueur a une probabilité de $2/3$ de réussir son tir au but et que les dix tirs sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'à l'issue des dix tirs au but, les deux équipes soient à égalité ?
2. Quelle est la probabilité que l'équipe A ait gagné à l'issue des tirs au but ?
3. Si les deux équipes A et B sont encore à égalité après les dix tirs au but, on fait tirer indéfiniment un tir au but par un joueur de A puis par un joueur de B jusqu'a ce que l'une des deux équipes ait pris définitivement l'avantage au score (en ayant tenté le même nombre de tirs). Soit p_n la probabilité que les deux équipes n'aient pas pu se départager après $10 + 2n$ tirs au but. Calculer p_n et $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Qu'en conclure ?

Exercice 53 : Un QCM comporte n questions. Pour chacune d'entre-elles sont proposées 3 réponses, dont une bonne et deux fausses. On suppose que l'on répond à toutes les questions, en choisissant au hasard, lorsqu'on ignore la réponse, l'une des trois propositions. Albert a bien révisé, et on estime qu'il connaît la réponse à trois quart des questions. Barnabé a moins bien travaillé et on suppose qu'il sait répondre correctement à un tiers des questions.

1. Quel est le pourcentage de bonne réponse que peut espérer donner chacun des candidats ?
2. Calculer la probabilité que Barnabé n'ait pas répondu au hasard à l'une des questions où il a la bonne réponse.

Exercice 54 : La marraine de Cendrillon choisit au hasard 2 souris parmi 50 souris (afin comme chacun sait, de les transformer en magnifiques chevaux pour tirer le carrosse). Or 10% des souris sont boiteuses et le resteraient même transformées. Avec un cheval boiteux, Cendrillon arriverait en retard au bal, mais rien ne serait compromis, tandis qu'avec deux chevaux boiteux, Cendrillon n'arriverait pas au bal.

1. Calculer la probabilité pour que Cendrillon arrive à l'heure au bal.
2. Calculer la probabilité pour que Cendrillon arrive en retard au bal.
3. Calculer la probabilité pour que le conte finisse tristement.

Exercice 55 : Albert et Barnabé jouent avec 2 dés bien équilibrés. Albert gagne s'il obtient un total de 7 et Barnabé gagne s'il obtient un total de 6. Ils jouent l'un après l'autre et la partie s'arrête dès que l'un des deux gagne. C'est Barnabé qui commence.
Quelle est la probabilité pour chacun des deux de gagner ? Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?

Exercice 56 : Le Prince Charmant, de dépit, a décidé d'épouser la première jeune fille qui pourra chausser sa charentaise en vair de pointure 37. Au château sont réunies 10 jeunes filles dont Cendrillon, ses deux demi-sœurs, la Fée Carabosse et six autres jeunes filles nubiles. Cendrillon n'a rien à craindre de ses deux demi-sœurs, qui chaussent un bon quarante-cinq et demi. Par contre, toutes les autres chaussent du 37 et pourraient enfiler la susdite chaussure. Le Majordome commence par sélectionner au hasard trois jeunes filles, et leur attribue un numéro d'ordre, également au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour que l'une des jeunes filles devienne la princesse ?
2. Quelle est la probabilité pour que Cendrillon se retrouve face à ses sœurs devant le Prince ? Quelle est la probabilité pour qu'elle devienne Princesse dans ce cas ?
3. Quelle est la probabilité pour que Cendrillon se retrouve en concurrence avec la Fée Carabosse ? Dans ce cas quelle est la probabilité pour que le prince épouse la Fée Carabosse ?
4. Quelle est la probabilité pour que le Prince épouse Cendrillon ?
5. On suppose que la Fée Carabosse lance un sort au Majordome. Ce sort a une probabilité p de réussir. Si il réussit, elle est sûre d'être choisie parmi les trois personnes, mais elle ne peut ensuite intervenir sur l'attribution des numéros. Si le sort échoue, tout se passe comme avant. Quelle est la probabilité pour que le Prince épouse Cendrillon ?