Les séries numériques

Les exercices à regarder sont mentionnés par une *.

Les classiques

(*)Exercice 1 : Démontrer la convergence et calculer la somme des séries de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2 - n}$ $(n \geq 2)$
2. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \geq 1)$
3. $u_n = \dfrac{e^{-5}4^n}{n!}$
4. $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 5}{3^n}$
5. $u_n = (n^2 - n + 3)\dfrac{2^n}{n!}$
6. $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$
7. $u_n = \dfrac{n^2 - n}{(n+3)!}$
8. $u_n = [n - (-1)^n]3^{-n}$
9. $u_n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{3^n}$
10. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$
11. $u_n = \dfrac{n+1}{3^n n!}$
12. $u_n = \dfrac{n^4 + 1}{n!}$
13. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

(*)Exercice 2 : Déterminer la nature des séries de terme général u_n :

1. $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{2n+5}{n(n^2-2)}$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
4. $u_n = 1 + \dfrac{5}{n^5}$
5. $u_n = \dfrac{3n^2 + 5n - 6}{2n(n+2)(n-4)}$
6. $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{3} - 1}{n}$
7. $u_n = \sin(2^{-n})$
8. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
9. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2 + 5}$
10. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
11. $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$
12. $u_n = \exp\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1$
13. $u_n = \exp(-\sqrt{1+n})$
14. $u_n = \dfrac{1}{\binom{n}{p}}$ (p fixé et $n \geq p$)

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n} + 1}$
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$
3. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{3^n} + \dfrac{2n-1}{5(n+1)}$
5. $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
7. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n - \lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
8. $u_n = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n}$
10. $u_n = a^{\ln n}$ $(a > 0)$
11. $u_n = \dfrac{(-1)^{n!}}{n}$
12. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$
13. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
14. $u_n = \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$

Exercice 3 : Etudier en fonction de $q \in \mathbb{R}$ la convergence de la série $\left(\dfrac{q^{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 0}$.

(*)Exercice 4 : Quelle est la nature de la série $\left(\sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$? (Utiliser les développements limités)

(*)Exercice 5 : On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1. Montrer que la série est convergente.
2. En décomposant u_n sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$, en déduire la somme de cette série.

Suites et séries

Exercice 6 : On considère la série $\sum u_n$, où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\sin(\pi/2^n)}{2^n}$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Notons S sa somme.
2. En notant, R_p le reste d'ordre $p \in \mathbb{N}$ de cette série. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N},\ |R_p| \leq \dfrac{1}{2^p}$

Exercice 7 : Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & u_n \,\mathrm{e}^{-u_n} \end{array} \right.$. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 8 : On définit la suite $u_n = n!\, n^{-n-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que la série de terme général $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.
3. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $n! \sim \ell n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$. (Formule de Stirling : $\ell = \sqrt{2\pi}$).

(*)Exercice 9 : Soit $0 < u_0 < 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
2. Etudier la série $(u_n)_{n\geq 0}$. (On pourra utiliser la série $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$)
3. Etudier la série de terme général $(u_n^2)_{n\geq 0}$.

Plus théorique...

Exercice 10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque : La réciproque st fausse. Poser $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$.

(*)Exercice 11 : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites strictement positives. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $\sum v_n$ converge, il en est de même de $\sum u_n$
2. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ aussi.

Exercice 12 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs tels que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Montrer que si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est convergente et si $\ell > 1$ la série est divergente.
2. Que peut-on dire si $\ell = 1$?

Remarque : En utilisant le théorème de Cesaro, nous voyons que nous obtenons les mêmes résultats si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Problème EDHEC 1998

1. La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi.
   (on montrera qu'il existe un entier naturel N tel que : si $n \geq N$, alors $x_n^2 \leq x_n$).

   On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$

   et d'autre part la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} & \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

2. Etudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
4. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
5. On pose pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
6. (a) Montrer que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   (c) En utilisant la première question, conclure quant à la nature de la série de terme général u_n.