Fonctions et dérivation

Les exercices à regarder sont mentionnés par une *.
A priori les exercices seront traités dans l'ordre suivant :
4.4, 5, 7, 8, 10, 16, 17, 20, 24.3, 13, 26.

Dérivabilité en un point

(*)Exercice 1 : Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points indiqués, et donner une allure de $\mathcal{C}_f$ (après avoir prolongé si nécessaire par continuité) :

1. $f(x) = x|x|$ en $x_0 = 0$
2. $f(x) = x^2 - |x|$ en $x_0 = 0$
3. $f(x) = |x(x+1)|$ en $x_0 = 0$ et en $x_1 = -1$
4. $\begin{cases} f(x) = \exp(1/x) & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 + x & \text{si } x \in]0;1[\\ f(x) = \ln x + \mathrm{e}^x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ aux points 0 et 1
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ en $x_0 = 0$
6. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{x+1}}$ en $x_0 = 0$
7. $f(x) = x \ln\left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$ en $x_0 = 0$
8. $\begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^x - x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \cos^2(\pi x) & \text{si } x \in [0;1] \\ f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ aux points 0 et 1

Exercice 2 : Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^p - a^p}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x - a}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\exp(-ax^2) - \exp(-a)}{\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^a - (x+a)^a}{(x+a)^{x+a} - a^a}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2 + x^3} - \sqrt[3]{2}}{(\ln(x+3))^2 - (\ln 3)^2}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - \tan^2(\pi x/4)}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{x\ln x - \mathrm{e}}{(1/x) - (1/\mathrm{e})}$

Exercice 3 : Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer leur dérivée. On précisera $\mathcal{D}_f$, et si nécessaire (et si possible), on prolongera f en certains points.

1. $f(x) = (1 - x^2)^2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1 - x^3)^2}$
3. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
4. $f(x) = \tan\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln x$
6. $f(x) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}^x \sqrt{\ln x}}$
7. $f(x) = x^x$
8. $f(x) = \mathrm{e}^{\left(-x - \ln x - \sqrt{1 + (\ln x)^2}\right)}$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{D}^n$, $\mathcal{C}^\infty$

(*)Exercice 4 : Quelle est la classe des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$?

1. $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \mathrm{e}^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(x) = 1 + x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \mathrm{e}^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} f(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$
4. $\begin{cases} f(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{1 - x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$
5. $\begin{cases} f(x) = x\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$
6. $f(x) = \exp|x|$

(*)Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 \mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? prolongeable par continuité ?
2. Le prolongement de f est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto x^r \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (r \in \mathbb{R}^{+*})$

1. Prolonger f par continuité en 0. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}^{+*}$?
2. Pour quelles valeurs de r, f est elle de classe $\mathcal{C}^0$ mais pas dérivable sur $\mathbb{R}^+$?
3. Pour quelles valeurs de r, f est elle dérivable mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$?
4. Pour quelles valeurs de r, f est elle de classe $\mathcal{C}^1$ mais pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^+$?
5. Pour quelles valeurs de r, f est elle deux fois dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$?

Bijection et dérivabilité

(*)Exercice 7 : Dans les cas suivants, montrer que f est bijective (préciser les ensembles de départ et d'arrivée) et étudier la dérivabilité de f^{-1}. Si elle existe, donner la fonction dérivée de f^{-1} et préciser le cas échéant les tangentes ou demi-tangentes verticales.

1. $\sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. $\cos x$ sur $[0, \pi]$
3. $\tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
4. $\operatorname{cotan} x$ sur $]0, \pi[$
5. $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$
6. $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$
7. $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ sur $\mathbb{R}$
8. $\operatorname{coth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ sur $\mathbb{R}$

Remarque : "sh" se lit *sinus hyperbolique* et sa réciproque, est notée "Argsh" (*argument sh*). De même, "ch" , "th" et "coth" se lisent *cosinus hyperbolique*, *tangente hyperbolique* et *cotangente hyperbolique* et leur réciproque, sont notées "Argch", "Argth" et "Argcoth".

Réponses : Sur les intervalles où la dérivée est définie, nous avons :

$(\text{Arcsin})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{Arccos})'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\text{Arccotan})'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2} \quad (\text{Argsh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (\text{Argch})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\text{Argth})'(x) = (\text{Argcoth})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

(*)Exercice 8 : Soit $f(x) = x^3 + x$ pour tout réel x. Montrer que f admet une réciproque g dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer g' en fonction de g. Quelle est la classe de l'application g ?

Exercice 9 : Montrer que $\forall x \in [-1; 1]$, $\text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \pi/2$

(*)Exercice 10 : Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Montrer que f admet une réciproque g, dont on donnera le domaine de définition.

L'application g est-elle dérivable ? Etablir une relation entre g et g' et en déduire $g'(1)$.

Dérivées n-ième

(*)Exercice 11 : Donner les dérivées $n^{\text{èmes}}$ des fonctions suivantes (On pourra calculer les premiers termes afin de trouver une relation que l'on démontrera par récurrence, ou utiliser la formule de Leibniz) :

1. $(x^4 - 1)e^x$
2. $(x^2 + x + 1)e^{-x}$
3. $e^x \sin x$
4. $\cos x$
5. $\sin x$
6. $x^{n-1} \ln x$
7. $x^{n-1} e^{1/x}$
8. $\sin x \cos x$
9. x^n $(n \in \mathbb{N})$
10. x^α $(\alpha \notin \mathbb{N})$

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivable, et $g_n : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer par récurrence sur n, que $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Sens de variations

(*)Exercice 13 : Soient $0 < a < b$. Montrer que f donnée par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ est strictement croissante.

Exercice 14 : Quel est le sens de variation de $f(x) = (x - \sin x)(\pi - x - \sin x)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$?

Exercice 15 : Quel est le signe de $\ln(1+x) - \sin x$ au voisinage de 0 ?

Théorème de Rolle et des accroissements finis

(*)Exercice 16 : Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

(*)Exercice 17 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(b) = g(a) + (b - a)g'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}\, g''(c)$

<u>Indication</u> : Définir A tel que $g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \dfrac{(b-a)^2}{2}\, A$

et considérer la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = g(x) - g(a) - (x-a)g'(a) - \dfrac{(x-a)^2}{2}\, A$

Exercice 18 : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soient a, b et c trois points de I tels que $a < c < b$. Montrer qu'il existe $d \in I$ tel que $f(c) = f(a) + \dfrac{c-a}{b-a}\big(f(b) - f(a)\big) + \dfrac{(c-a)(c-b)}{2} f''(d)$

<u>Indication</u> : Utiliser $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{(x-a)}{(b-a)}\big(f(b) - f(a)\big) - \dfrac{A}{2}(x-a)(x-b)$ pour A bien choisi

Exercice 19 : Soient $a < b$, f et g deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x)$ ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Montrer que $g(b) - g(a) \neq 0$
2. Mq $\exists\, c \in]a, b[$ tq $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (Indication : Utiliser $\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)$ avec λ bien choisi)

(*)Exercice 20 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, admettant $p + 1$ zéros distincts sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f^{(p)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b]$, telle que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$.
Montrer que $f^{(p)}$ admet au moins p zéros sur $]a, b[$.

Exercice 22 : On dit qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est <u>scindé</u> s'il peut se factoriser en produit de polynôme de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n, scindé, avec ses racines distinctes. Montrer que P' est scindé. et que ses racines aussi sont distinctes.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé et de degré n. Montrer que P' est scindé.

Exercice 23 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x, y) \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Est-ce que la propriété marche encore si f est continue sur $[a, b]$ mais $\mathcal{C}^1$ seulement sur $]a, b[$?

Inégalités

(*)Exercice 24 : Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $3x < 2\sin x + \tan x$
2. $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin^2 x \leq \dfrac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$
3. $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$

Exercice 25 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$. En déduire que $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\mathrm{e}}$

Convexité

(*)Exercice 26 : En utilisant des arguments de convexité, montrer que $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 27 : Soit f une fonction convexe sur I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n points de I. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, n réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Montrer qu'alors $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$.

Remarque : Cette formule est appelée formule de Jensen.

Exercice 28 : Montrer que $f : x \longrightarrow -\ln x$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
En déduire, grâce à la formule de Jensen, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n$ on a :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Etude de fonction

Exercice 29 : Etudier les fonctions suivantes selon le plan d'étude donné en cours (en faire l'étude la plus complète possible) :

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x + 1$
2. $f(x) = \ln(2 + \cos x)$
3. $f(x) = x(\ln x)^2$
4. $f(x) = \left|\dfrac{3x+1}{2x-1}\right|$
5. $f(x) = \sup(x^2 + 2x - 1\,,\, -x^2 + 3)$
6. $f(x) = \ln|\sin x|$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$
8. $f(x) = \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|^x$
9. $f(x) = x - \ln\big((\mathrm{e} - 1)x^2 + 1\big)$
10. $f(x) = \left(\dfrac{2x-3}{x}\right)^4$
11. $\begin{cases} f(x) = & \mathrm{e}^{-x} - x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = & \cos^2(\pi x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = & 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$
12. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
13. $f(x) = \left(\dfrac{1 + 2^x}{2}\right)^{1/x}$
14. $f(x) = \dfrac{|x-1| - |x-2|}{|5+x|}$
15. $f(x) = 4\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$
16. $f(x) = \dfrac{4x-5}{x^2-1}$
17. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$
18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 11}{x^2 + x - 2}$
19. $f(x) = \operatorname{Arcsin} x$
20. $f(x) = \operatorname{Arccos} x$
21. $f(x) = \operatorname{Arctan} x$

Supplément

Exercice 30 : L'objectif de cet exercice est de montrer le Théorème de Darboux : Soit f une application dérivable sur un intervalle I. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

1. Soient $a, b \in I$. Si $f'(a)f'(b) < 0$ montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. En déduire le théorème de Darboux.